解の公式～３次・４次方程式への拡張～

河田　晟生　森岡　慶太　赤澤　壮一

要約

We were interested in how to calculate the quadratic formulae of a quadratic equation. We considered whether the method could be applied to cubic and quartic equations, and studied it. We succeeded in calculating the quadratic formulas of a quadratic equation.

私たちは３次方程式，４次方程式の解の公式について研究しました。３次方程式には「カルダノの公式」という有名な解の公式がありますが，わたしたちの知識ではその公式を理解することができませんでした。ですから，わたしたちの理解できる範囲（おもに学校で学習をした内容）で３次方程式の解の公式を作り出そうと考えました。主に夏休みの期間を使い，地道で複雑な式変形に大変苦労しましたが，３次方程式，４次方程式の解の公式を導くことができました。

１．序論

〈　目的　〉

２次方程式の解の公式の導出方法として一般的には平方完成を用いて求めるが，その他の方法として平行移動を用いる方法で思考した。３次，４次方程式に拡張できそうだと考え，自分たちで導こうと思い研究した。

〈　方法　〉

２次方程式の場合，$ax^2+bx+c=0$を$ax^2=m$へと平行移動させ，解き，その解を逆に平行移動させて，解の公式を導く。この方法を３次，４次方程式に拡張していく。つまり，一般型$ax^3+bx^2+cx+d=0$，$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$を一般的な解法が存在する形に平行移動させ，解を出す。その解を逆に平行移動して元の方程式の解を求める。

２．本論

〈　３次方程式について　〉

$ax^3+bx^2+cx+d=0$の平行移動の可能性

（ⅰ）　$ax^3+b'x^2+c'x=0$　　解法はあるが，変形不可能

（ⅱ）　$ax^3+b'x^2+d'=0$　　変形可能だが，解法はない

（ⅲ）　$ax^3+c'x+d'=0$　　解法があり，変形も可能

$ax^3+bx^2+cx+d=0$を$ax^3+c'x+d'=0$に変形する方法で３次方程式の解の公式を導く

ここから先は，２次の項のない３次方程式の解を求める

x^2の項を消すため $x = t - \frac{b}{3a}$ を $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ に代入

$$a\left(t^3 - \frac{t^2 b}{a} + \frac{tb^2}{3a^2} - \frac{b^3}{27a^3}\right) + \mathrm{b}\left(t^2 - \frac{2tb}{3a} + \frac{b^2}{9a^2}\right) + ct - \frac{bc}{3a} + d = 0$$

$$at^3 - \frac{tb^2}{3a} + \frac{b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + ct + d = 0$$

$$at^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)t + \left(\frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d\right) = 0$$

$$t^3 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)t + \left(\frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}\right) = 0$$

$t^3 + mt + n = 0$　として，この方程式の解 t を求める。
ここで，$t = A + B$　とすると

$$(A + B)^3 + m(\,A + B) + n = 0$$

$$A^3 + B^3 + 3AB(A + B) + m + n = 0$$

$$A^3 + B^3 + (A + B)(3AB + m) + n = 0$$

ここで，$3AB + m = 0$　・・・・・①　を満たすA ,Bを選ぶ。

$A^3 + B^3 + n = 0$　・・・・②

①　より　$AB = -\frac{m}{3}$

$$A^3B^3 = -\frac{m^3}{27} \qquad ・・・・③$$

②・③から解と係数の関係より

$$y^2 + ny - \frac{m^3}{27} = 0$$

$$y = \frac{-n \pm \sqrt{n^2 + \frac{4m^3}{27}}}{2}$$

$$A^3 = \frac{-n + \sqrt{n^2 + \frac{4m^3}{27}}}{2}$$

$$B^3 = \frac{-n - \sqrt{n^2 + \frac{4m^3}{27}}}{2}$$

$$A = \left(\frac{-n+\sqrt{n^2+\frac{4m^3}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$, \left(\frac{-n+\sqrt{n^2+\frac{4m^3}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\omega$$

$$, \left(\frac{-n+\sqrt{n^2+\frac{4m^3}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\omega^2$$

$$B = \left(\frac{-n-\sqrt{n^2+\frac{4m^3}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$, \left(\frac{-n-\sqrt{n^2+\frac{4m^3}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\omega$$

$$, \left(\frac{-n-\sqrt{n^2+\frac{4m^3}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\omega^2$$

①を満たすAとBの組み合わせを選ぶ

よって$t^3+mx+n=0$の解は次のようになる

$$t = \left(\frac{-n+\sqrt{n^2+\frac{4m^3}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{-n-\sqrt{n^2+\frac{4m^3}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$, \left(\frac{-n+\sqrt{n^2+\frac{4m^3}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\omega + \left(\frac{-n-\sqrt{n^2+\frac{4m^3}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\omega^2$$

$$, \left(\frac{-n+\sqrt{n^2+\frac{4m^3}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\omega^2 + \left(\frac{-n-\sqrt{n^2+\frac{4m^3}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\omega$$

元の式の解をa，b，c，dで表すと次のようになり，解の公式が得られる

$$x =$$

$$\frac{1}{6a}\left\{\begin{matrix} -2b \\ +p\sqrt[3]{4\left(-27a^2d+9abc-2b^3+3a\sqrt{3(27a^2d^2-18abcd+4ac^3+4b^3d-b^2c^2)}\right)} \\ +q\sqrt[3]{4\left(-27a^2d+9abc-2b^3-3a\sqrt{3(27a^2d^2-18abcd+4ac^3+4b^3d-b^2c^2)}\right)} \end{matrix}\right\}$$

$$(p\ ,\ q)=(1\ ,\ 1)\ ,\ (\omega\ ,\ \omega^2)\ ,\ (\omega^2\ ,\ \omega)$$

〈　４次方程式について　〉

４次方程式は

$$x^4+c'x^2+d'x+e'=0$$

の形に平行移動する。

$$t^4+lt^2+mt+n=0$$

として考えると,

$$(t^2+\lambda)^2=(pt+q)^2$$

に変形させれば，解を求めることができる。そこで,

$$(t+\lambda)^2=(2\lambda-l)t^2-mt+(\lambda^2-n)$$

とし, 右辺が重解をもてば, 上の形に変形できる。

判別式$D=(-m)^2-4(2\lambda-l)(\lambda^2-n)=0$

より

$$8\lambda^3-4l\lambda^2-8n\lambda+4ln-m^2=0$$

となり，３次方程式の解の公式で

$\boldsymbol{\lambda}$を見つけられるので, ４次方程式の解の公式を求めることができる。

３．結論

３次方程式の場合$ax^3+bx^2+cx+d=0$を$ax^3+bx^2+cx=0$へ平行移動させれば, 一般的な解法がある。しかし変形可能ではなかった。だから，一般的な解法が存在し，変形可能な式を見つけなければならなかった。それが$x^3+mx+n=0$だった。４次方程式の場合は$x^4+lx^2+mx+n=0$だった。

４．考察

ｎ次方程式と考えたとき,（ｎ−1）次の項を消すように平行移動するという考え方で３次方程式も４次方程式も解の公式を導くことができた。

５次以上の方程式には一般的に解の公式が存在しないことは事実である。しかし，上の結果から特殊な場合に限っては求めることができるかもしれない。それについて今後研究したい。