

音楽と数学

山本 真秀 青江 栞 藤本 瞳

要約

ピタゴラス音律とは、純正5度を積み重ねオクターヴの12の半音が全て得られることを利用した音律である。

例えば、ド：ソ=2：3であることより、 $\text{ソ} \times \frac{2}{3} = \text{ド}$ となる。次に、平均律についてである。平均律とは、周波数を利用した現在使われている音律であり、一般項 $a_n = 1.0594^{n-1}$ の等比数列になる。

平均律が使われている理由は、ピタゴラス音律が転調できないためである。転調できない理由は、5度音程を12回重ねると7オクターヴになるが、1オクターヴを7回重ねたものより少しずれるからである。このことをピタゴラス・コンマといい、比で表すと74：73になる。

これらのことを踏まえてリサーチ曲線をつくってみた。リサーチ曲線とは、 $X = \sin at, Y = \sin bt$ (a, b は有理数)で定義される、振動数の比をX軸とY軸で表した図形である。

1. 序論

私たちは音楽と数学の関係について調べた。研究の理由は、音楽と数学には深い関係があることを知り、興味を持ったからである。音楽と数学の関係において、ピタゴラス音律、平均律、ピタゴラス音律の欠点、リサーチ曲線について探究した。

2. 本論

①ピタゴラス音律

純正5度を積み重ねオクターヴの12の半音が全て得られることを利用した音律である。周波数比を利用し

$$C=1, D=\frac{8}{9}, E=\frac{64}{81}, F=\frac{3}{4}, G=\frac{2}{3}, A=\frac{16}{27}, H$$

$$=\frac{128}{243} \text{ となる。ただし、現在使用されていない。純}$$

正率とは異なる。

②平均率

周波数を利用した現在使用されている音律である。C=261.62,

$$Cis=277.18, D=293.66, Dis=311.12, E=329.60,$$

$$F=349.18, Fis=369.92 \text{ となる。}$$

前の音を1.0594倍すると次の音になる。ここで、ある一つのCから1オクターヴ上のドまで項数 $n=12$,初

項 $a=1$, 項比 $r=1.0594$ の等比数列となり、 $a_n = a \cdot r^{n-1}$ より一般項 $a_n = 1.0594^{n-1}$ となる。

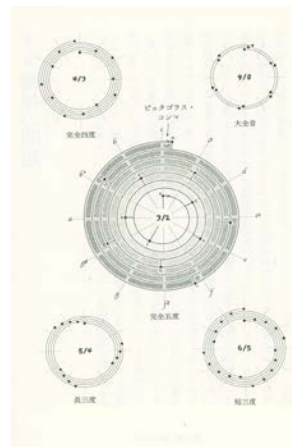
③ピタゴラス音律の欠点

・転調ができない。

音程は必ずしもすっきりとした関係になっていない。よく知られた例がオクターヴと完全5度(3：2)との関係である。

・下図で中心に近い0の位置でどれかの音が鳴ったとして、そこから完全5度の音程でらせんを描きながら外向きに進んでいく。(一周が1オクターヴに相当)

・5度音程を12回とると、7オクターヴになるが図より最後の音はオクターヴを少し行きすぎわずかに#がかかる。



・四隅の図は、それぞれ長三度 (5 : 4), 短三度 (6 : 5), 四度 (4 : 3), 全音 (9 : 8) を重ねて作ったらせんだ。どの場合もオクターブは、らせんの一周に相当する。

このずれが生じるのは奇妙だが全てを説明する理論は (今のところはまだ) 作られていない。5度を12回

重ねれば $(\frac{2}{3})^{12} \approx 129.75$ になるのに対し、オクター

ヴを7回重ねたものは $2^7 = 128$ にしかならないから

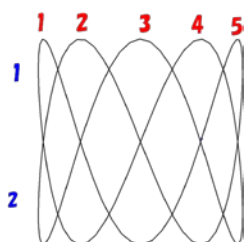
だ。この音程差、 $(\frac{2}{3})^{12} \div 2^7 = 1.013643$ のこと

をピュタゴラス・コンマといい、比で表せばおよそ 74:73 である。

④リサーチ曲線

$X = \sin at$, $Y = \sin bt$ (a, b は有理数) で定義される。

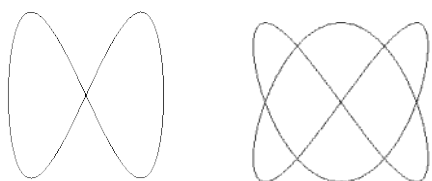
例えば $X = \sin at$, $Y = \sin bt$ で $a=2, b=5$ のとき 下図となる。



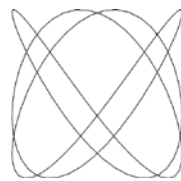
ここでリサーチ曲線でさまざまな音程をみってみる。

ずれた位相

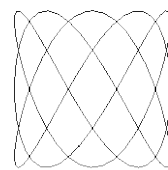
2 : 1 (1オクターブ) 3 : 2 (五度)



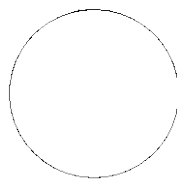
4 : 3 (四度)



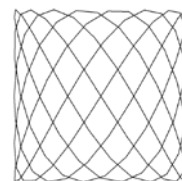
5 : 3 (長六度)



1 : 1 (ユニゾン)

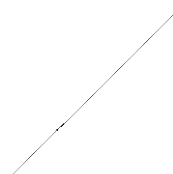


8 : 5 (短六度)



そろった位相

1 : 1 (ユニゾン)



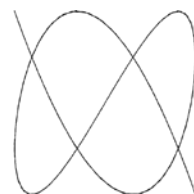
2 : 1 (1オクターブ)



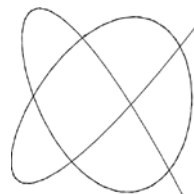
3 : 2 (五度)



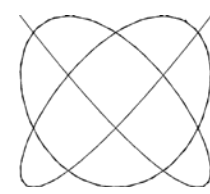
5 : 3 (長六度)



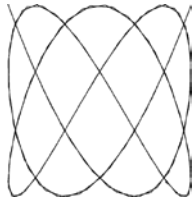
5 : 4 (長三度)



6 : 5 (短三度)



8 : 5 (短六度)



3. 結論

リサージュ曲線できれいな曲線の図形を描いているということは、平均律に矛盾がないことを表しているのではないか。逆に、表すことができないものは、音楽が数学では表しきれない美しさがあるのではないか。

4. 感想・反省

ピタゴラス音律は確立されていたので掘り下げに苦労した。予想通り、音楽と数学の関係がかなりあることがわかった。今回、音程とリサージュ曲線の間を調べた。そこで人の声をリサージュ曲線にして、数式を出してみようと考えたが学校にその機械が無かったので断念した。もし今後チャンスがあれば研究してみたい。

5. 参考文献

ハーモノグラフ 音がおりなす美の世界
アンソニー・アシュトン 青木 薫訳
ランダムハウス講談社

6. 謝辞

今回の研究、論文を制作するにあたって数学ゼミ担当教員の実藤先生、山下先生と TA である佐藤先生には多大にご協力いただきました。感謝を申し上げます。本当にありがとうございました。