

ピタゴラスの新定理！？

内田 京

要約

今回私はピタゴラス数の規則性について探究した。大本となる規則性はピタゴラス数を習ったときに目星をつけていたので、まず自分なりに証明してみた。その規則性は成立するとわかったのだが、もう少し深めてみた。その際、自分の考えだけでは及ばないところなどは数学ゼミ担当の山下先生や実藤先生、T Aの佐藤先生の助けを借りつつ、何度も有名数を比べたり、文字でおいて一般化することによって、新定理を導き出した。途中、文字で置き換えたせいで混乱したが、最終的にはうまくまとめることができたと思う。残念ながら、最終的にはもともとある定理にたどり着いてしまったが、自分でもともとある定理を導きだせたのはうれしかった。本当に大変だったが、一つ一つつながっていく嬉しさや達成感がより研究を進めていく力となった。ここでは例も使い、実際にこの定理を導いてみることにする。

1. 序論

私が今回ピタゴラスの定理を研究しようと思ったきっかけは、中学二年生でピタゴラス数を習ったとき、ピタゴラス数を眺めていたら規則性のようなものを見つけたことである。見つけてすぐにピタゴラス数に引き込まれてずっと気になっていた。

ピタゴラスの定理を研究するにあたって、ピタゴラスのことについても簡単に調べてみた。

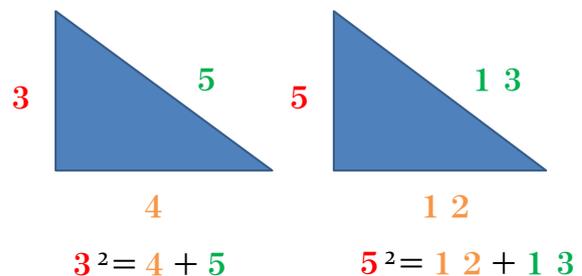
ピタゴラス(紀元前582-496年)はエーゲ海にあり、ギリシアの植民地であるサモス島に生まれた。そしてギリシアの七賢人の一人とされ、ターレスの定理を証明した哲学者であるタレスの教えを受けた。その後エジプトに留学し、帰国後サレス島で学校を開いたが失敗した。そして南イタリアのフロントに移り、また学校を開いた。ピタゴラスは弟子たちにそこで研究したことを口外するのを禁止し、弟子たちが発見したこともピタゴラスの発見とされた。そこでこの集団はピタゴラス学派と呼ばれた。

このピタゴラス学派は数論・幾何学そして音楽の分野にまで多くの業績を残したが、最も重要なのはピタゴラスの定理だとも言われている。

高校で数学ゼミに入ったときその定理があっているのか調べてみようと思った。本論文では、見つけた規則性を文字で置き換えることで、最終的にもともとある定理にたどりついた。

2. 本論

まず、有名な(3, 4, 5)と(5, 12, 13)を見比べてみた。すると、どちらも最小の辺以外の辺の和が最小の辺の2乗になっていることがわかった。

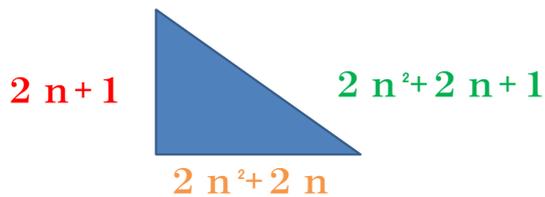


三辺のうち最小の辺を

$2n+1$ ($n > 1$) とすると

$(2n+1)^2 = (2n^2+2n) + (2n^2+2n+1)$ となる。

※ただし $2n+1$ は1でない奇数とする。



すると新定理では

$$(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 \dots (\text{他辺の和})$$

斜辺と残りの辺の差は1なので

$$\text{斜辺} : 2n^2 + 2n + 1$$

$$\text{残りの辺} : 2n^2 + 2n$$

これらを三平方の定理に代入し成立すれば証明完了。

$$(2n+1)^2 + (2n^2+2n)^2 = (2n^2+2n+1)^2$$

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= 4n^2 + 4n + 1 + 4n^4 + 8n^3 + 4n^2 \\ &= 4n^4 + 8n^3 + 8n^2 + 4n + 1 \end{aligned}$$

$$(\text{右辺}) = 4n^4 + 8n^3 + 8n^2 + 4n + 1$$

よって(左辺) = (右辺)

したがってこの新定理は成立する。

しかしこの新定理は三辺のうち最小の辺が1でない奇数のときには通用するが、最小の辺が素数でない場合は他にもあてはまるピタゴラス数がある。

例えば...

最小の辺 : 39

→新定理では 39: 760: 761、他には 39: 80 : 89

最小の辺 : 51

→新定理では 51: 1300: 1301、他には 51: 140: 149

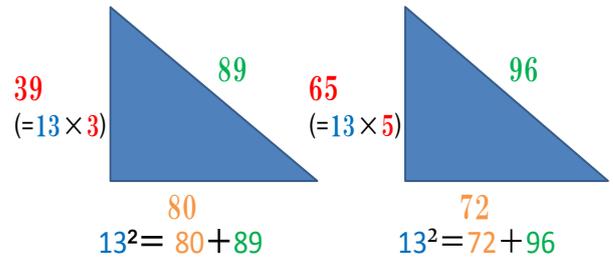
さらに、この新定理にあてはまらない、補足②のような組み合わせに通じる規則はないかと考えてみた。

(39, 80, 89) (65, 72, 97)に

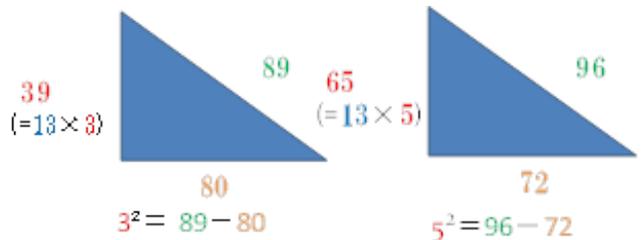
通じる規則性を考える。

どちらも最小の辺が13の奇数倍になっている。

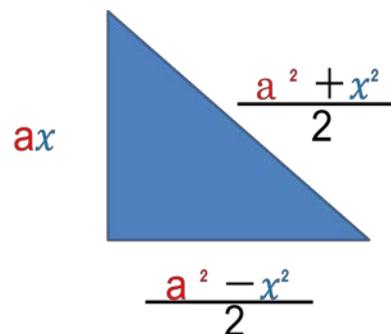
どちらも最小の辺以外の辺の和が13²になっている。



さらにどちらも最小の辺以外の辺の差が 最小の辺にかけた奇数の二乗になっている。



これを文字に置き換えると



最小の辺を a (a:定数) をx倍 した axとすると 図のように表せる。

さらにこれらを2倍すると以下ようになる。

最小の辺： $2ax$

斜辺： a^2+x^2

残りの辺： a^2-x

これは一般に知られている、ピタゴラス数の導き方である。

3. 結論

つまり私の見つけた規則性は新定理ではなく、もともとあった定理を少し変えたものだったのだ。

見つけた規則性は公式化するうちにもとからあったものにたどり着いてしまったので新定理ではなかったがもともとあった定理にたどり着いたことはそれはそれでうれしかったので、

めげずにこれからもまた違った規則性を探して深めていきたいと思う。

4. 感想

今回、私の見つけた規則性は新定理ではなかった。しかし、もともとあった定理にたどり着けたのはうれしかった。

四則演算など簡単な方法で規則性を発見する楽しさが生まれたので、改めて数学の面白さに気づくことができた。

ちなみに今気になっているのはテレビで放送されていた映画の中で登場していた友愛数についてで、これもまた足したり引いたりして規則性を見つけたいと思う。

5. 謝辞

今回の研究、論文を制作するにあたって、数学ゼミ担当教員の山下先生と実藤先生、田中先生、TAである佐藤先生には多大にご協力いただきました。

感謝を申し上げます。

本当にありがとうございました。