あられ数

古川　泰誠
指導教員　　岩本　康隆　田中　誠

要約

私は，あられ数問題についてこの問題が正しいということを証明するために研究した。
あられ数を 1 から逆算することでできる「あられ樹形図」というものが作成できた。
このあられ樹形図は左右対称であり，左右対称の対応する 2 つの数は各桁の総和が等しいことを見つけたが，その反例および反例の特徴を見つけた。
それは，2 つの数を 27 の剰余類にし，その差は 9 または 18 であるということだった。

Abstract

I researched collatz problem. I tried to prove that this rule applies to all the numbers through this research .I started with 1, applied the rules in reverse and create a diagram. This inverse relation forms a tree. The tree diagram is symmetrical if I consider 1 to 16 an axis.
When the sums of any 2 numbers' digits are equal and the two numbers are divided by 9, their remainders are equal. However, this doesn't apply to all the numbers.
When the sums of any 2 numbers' digits aren't equal and the two numbers are divided by 27, their reminders are 9 or 18.
However, by using those results I couldn't prove that the rule applies to all the numbers.

キーワード

あられ数　剰余類　九去法

Key words

collatz problem　remainder　casting out nines

序論

名古屋大学の教授エリック先生の講演の中で紹介されたあられ数の問題に興味を持った。あられ数の問題とはある任意の数が偶数だった時 2 で割り、奇数であれば 3 倍して 1 を足す。この作業を続けていくと 1 に戻るという問題である。このあられ数という問題は未解決問題である今回はこのあられ数問題の証明に取り組んでみた。

本論

①　あられ樹形図の作成。

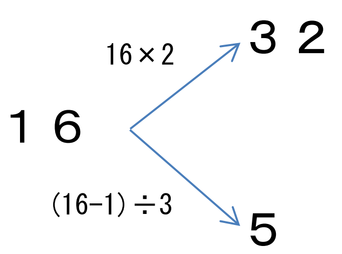
あられ数は本来、任意の数から 1 に収束する現象であるが、始めの数が不特定な整数では証明が難しいと考えた。そこであられ数の問題を、1 から各整数に「1 を足して 3 で割る」もしくは「2 倍」の作業を続けることで、任意の数を表せる。と考えこれを証明しよう考えた。そこで以下の定義をする。

定義

以下のような 1 から任意の数へ辿り着く段階を図にして表したものをあられ樹形図という。

また、ある数が上記の計算により二つの整数を表せた場合、二数に分かれたと考え、この現象を以後「枝分かれ」と呼ぶ。

（枝分かれの例を以下に示す。）



枝分かれの例

また作成していくにつれて同じ数が登場するようになったのでそれに関して以下の定義を示す。

定義

あられ数の「枝分かれ」において「1 で引いて 3 で割った数」が偶数のとき、その数は枝分かれとして考えずあられ樹形図のなかで存在しないものとする。

この定義あられ樹形図の性質より「1 を引いて 3 で割る」という計算は、あられ数における「3 倍して 1 を足す」計算の逆算である。

また、「3 倍して 1 を足す」計算は奇数に対して行うものであるため「1 を引いて 3 で割る」ことによって現れた偶数は存在しないためこの定義を定めた。

② あられ樹形図の考察

まず樹形図を作成し考察した。

図より 16 までは枝分かれせず、16 ではじめて

5 と 32 に枝分かれすることが分かった。そこで、

また枝分かれしない 16 までの数列を対象の軸としたとき以下の予想が考えられた。

予想

あられ樹形図は 1～16 までの数を軸としたとき、左右対称に枝分かれをしていく。

これは予想であるため証明はまだ行っていないがこのことを示すことができたらこのあられ数問題を考察するうえでかなり有効な理論になると考えている。

また対称的な二数の各桁の数を足すことを 1 ケタになるまで繰り返して得られる数（以後、各桁の和と呼ぶ）は等しいことが予想されたが、反例も見つかった。

なぜこのような反例が見つかったのかを調べるために、各桁の和が等しい二数に関して以下の補題を示す。

補題

各桁の和は 9 割った余りに等しい。

（ただし、9 で割った余りが 0 の場合は各桁の総和を 9 とすることにする。）

証明

ある整数を 9 で割った余りと、その整数の各位の数の和を 9 で割った余りとは等しいという九去法を利用すると明らかである。

この補題用いて以下の定理を示す。

定理

「枝分かれ」した二つの数の和等しくない⇔
枝分かれする前の 2 数の 27 で割った剰余類の差が 9 または 18 であり、かつ元の数の 3 で割った剰余類が 1 である。

証明

2 数の各桁の和が等しくその 2 数から枝分かれした先の数の各桁の和が等しくない場合を考える。
枝分かれし、各桁の和が等しくない数は元の数の各桁の総和が等しいことより

$$9n+m\ ,\ 9k+m+6 \text{ or } 9n+m\ ,\ 9k+m+3$$

(n,k;整数　ただし、m,m+6,m+3 はそれぞれの数を 9 で割った剰余類である。)と表せる。
その枝分かれする前の数はそれぞれ 3 倍して 1 を足し

$$27n+3m+1\ ,\ 27k+3m+19 \quad \text{or}$$
$$27n+3m+1\ ,\ 27k+3m+10$$

となる。
それぞれの数の 27 における剰余類の差は 18 または 9 である。
また，これらの数は 3 で割った剰余類が 1 である。
よって、示された。

③ 対称性の規則性の考察

次に数列の対称性について考察してみた。数列の対称性は何らかの数列の規則性に関係しているのではないかと考えた。また対称な二数の各桁の総和の関係と数列の規則性に関係があるのではないかと考えた。

④ 1．対称な二数の各桁の総和の関係の考察

対称な二数の各桁の総和の関係には、各二数において何らかの、整数的性質の共通要素があると考えた。そこで二数に共通要素がないか調べた。

④ 2．全体を通しての今後の見解

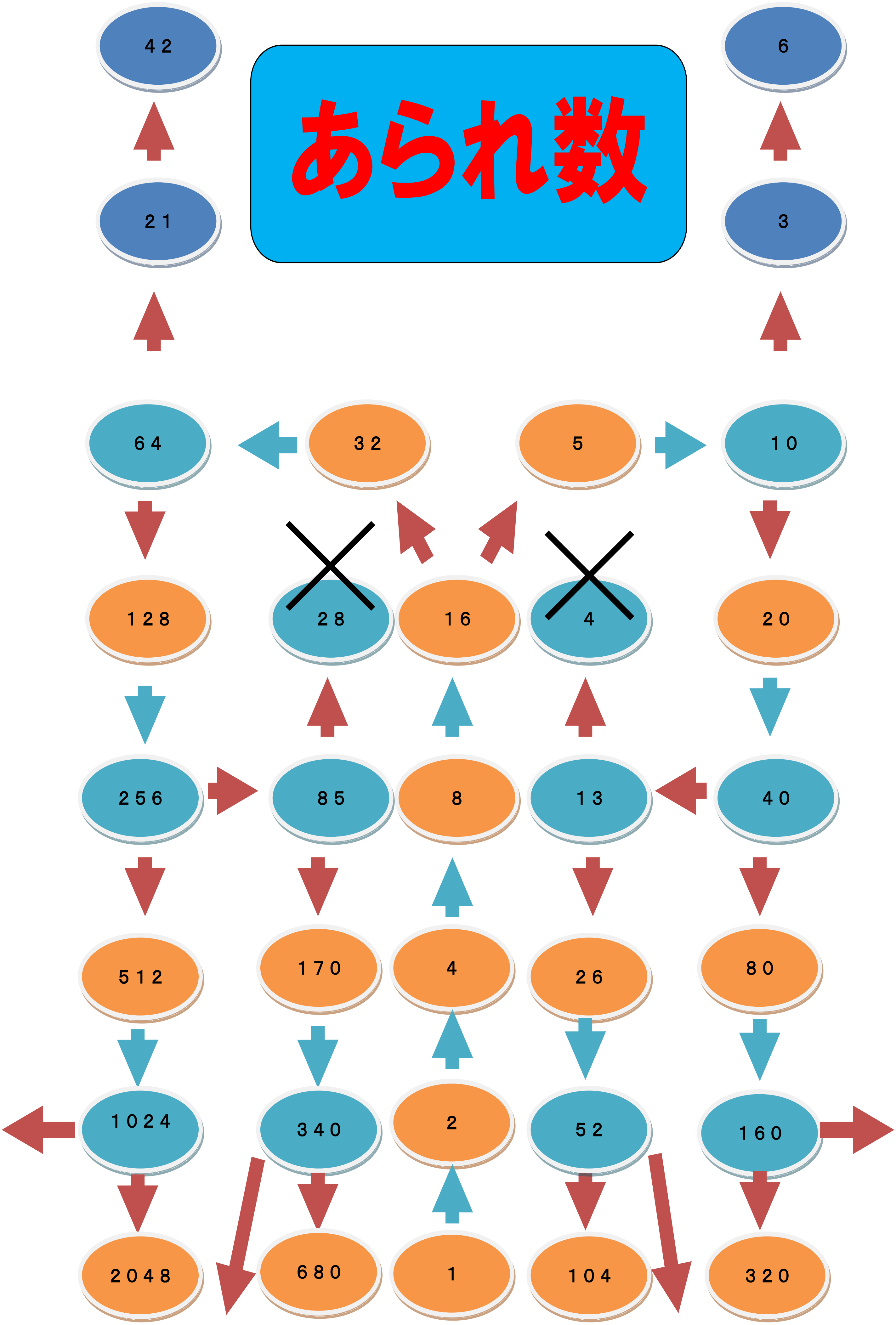
対称的な二数の各桁の総和が等しくならない時の、条件を利用し二数の整数的性質の共通要素を求め樹形図の規則性を見つける。
そして規則性を一般化し全ての整数を表せることを証明する。

謝辞

以下の方々に深く御礼申し上げます。

岡山大学大学院　曽布川 拓也教授
香川大学教育学部教授　内藤 浩忠教授
津山工業高等専門学校　松田 修先生

あられ数



42
6
21
3
64
32
5
10
128
28
16
4
20
256
85
8
13
40
512
170
4
26
80
1024
340
2
52
160
2048
680
1
104
320