

フラクタル

藤岡 佳帆理

指導教員 岩本 康隆 田中 誠

要約

私はフラクタルについて研究した。まず、フラクタルがどのようなものであるか学んだ。次にパスカルの三角形以外でフラクタル性をもつ図形を作るために数を規則的にならべた。その結果、数の並びに自己相似性らしきものを見つけた。

Abstract

I researched Fractals. First, I studied about what is a fractal. Second, I lined up numbers regularly to make a figure with fractals, except the triangle of Pascal. Finally, I found a part and the whole are similar in shape.

キーワード

自己相似 フラクタル フィボナッチ数列 コッホ曲線 パスカルの三角形

Keywords

self-similarity fractal fibonacci sequence koch curve pascal's triangle

1. 序論

数学について調べてみようと思い、インターネットで検索(図書室で本探し)をしていると、“フラクタル”という分野に出会った。“フラクタル”について全く知らなかったが、とても美しい作図例に興味を持ち、自分でも発見してみたい、作ってみたいと考え研究テーマにした。

2. 本論

○フラクタルとは

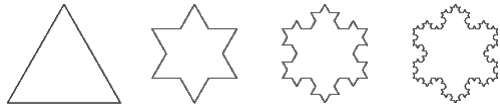
フラクタルは、幾何学の概念のひとつで図形の部分と全体が自己相似のなっているものなどをいう。フラクタルの例に、以下のようなものがある。

・ Sierpinsky triangle



図は、シェルピンスキーの三角形(別名;シェルピンスキーのバスケット, シェルピンスキーのざる)というものである。フラクタル図形であるため、正確に作図することは不可能だが、近似的な図形を作図することはできる。

• Koch curve



図は、コッホ曲線で作った snowflake である。線分を 3 等分し、分割した 2 点を頂点とする正三角形の作図を無限に繰り返すことによって得られる図形だ。1 回の操作で線分の長さが $4/3$ 倍になるので、操作を無限に繰り返して得られるコッホ曲線の長さは無限大である。これも完全なものは作図することができない。

○黄金比であるフィボナッチ数列とフラクタルの関係

★フィボナッチ数列とは

前 2 つの項の和を次の項として順次作っていく数列のことをいう。

例、1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

自然界の様々なものの中で、フィボナッチ数列の生成規則は黄金比の性質の最適な状況を表している。代表例として以下のものがある。

• 全体図



図は典型的なフラクタルの形をしたロマネスコという野菜である。この野菜は、配列した

蕾や円錐の数がフィボナッチ数列に従っている。理由は、このロマネスコのつぼみを一つ切り落とすとすると、それは小さいロマネスコにみえる。さらに切っていく。しかしそこには、また小さなロマネスコにみえる。つまり小さな円錐と大きな円錐は相似でありフラクタルであるということがわかる。

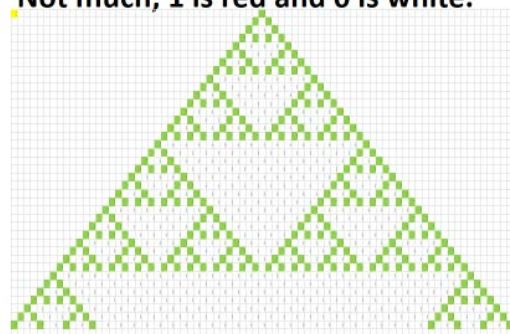
○シェルピンスキーのギャスケットというパスカルの三角形を n で割ったときの余りの色分けしたものの仕組み

パスカルの三角形を 2 で割り切れないものに色を塗ってみると対称性のある図形を見つけることができる。さらに 3 や様々な数字で割り切れないものを塗りつぶしてみても対称性のある図形ができる。特に 2 で割り切れない数を塗りつぶしてできた図形を「シェルピンスキーのギャスケット」という。

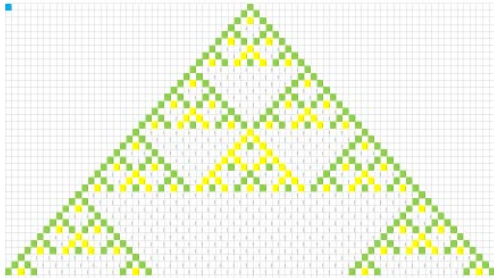
• 2~4 で割ったもの

It divides by 2.

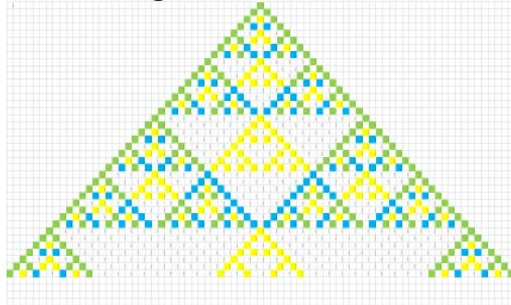
Not much, 1 is red and 0 is white.



It divides by 3.
Not much, 2 is red and 1 is green and
0 is white.



It divides by 4.
Not much, 3 is blue and 2 is yellow and
1 is green and 0 is white.



3. 研究内容与方法

今回、目的であるフラクタルの発見をするために、規則性のある数の並びを利用してそれにフラクタル性を持つかどうかを研究した。研究方法は以下になっている。まず、規則性のある数の並び方だが、1, 2, 3, 4、と正方形に並べてみた。次に研究方法についてだが、1、数を並べる 2、出来た数列を様々な数で割って割り切ることのできる数に色を付ける 今回は 3 で割りきれものに黄色、4 で割りきれものに緑色、を塗ってみた。

3 で割ったもの↓

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

4 で割ったもの↓

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

5 で割ったもの↓

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

4. 結論

<<まとめ>>

今回の研究で、結果はフラクタルの自己相似性らしきものが見えた。この結果から導き出される結論は規則性のある数の並びを用いて色を塗っていくと自己相似性が見えるので、フラクタルの可能性はあるのではないかということだ。

<<今後の課題>>

階差数列やある法則性に従って並べたものがなぜフラクタルになるのかを調べる。他の規則性がありそうな数列をみつけて、フラクタルになるかを調べる。数列を正方形だけでなく三角形や五角形に並べるとフラクタルができるのか調べる。

5. 謝辞

先生方にはご指導&ご助言を頂き、ありがとうございました。この紙上を借りて御礼申し上げます。

6. 参考文献

MATHEMATICAL CURIOSITIES (IAN STEWART)

Wolfram Math World

(<http://mathworld.wolfram.com/>)

Math words

(<http://www.mathwords.com/>)

Web Ecoist

(<http://webecoist.momtastic.com/>)