タイリング

杉　悠生

指導教員　道廣　映子，亀田　弓衣，土井　康広

要約

私はタイリングについての論文を読み，数学的な話題として興味をもった。ここで言うタイリングとは，一辺１の正三角形格子に点対称な六角形をとり，その六角形を正三角形２つ分のひし形で敷き詰める場合の数を考えるものであった。論文に出てくる MacMahon さんの公式は既習の知識では理解できなかった。とくに，六角形のある一辺の長さを１としたとき，高校生でも理解できる公式を導けるのではないかと予想し，組み合わせを利用した式で表すことができた。また，得られた式の図形的意味を考え，縦のひし形のおきかたの場合分けで，全体の敷き詰め方の総数の図形的解釈を与えることができた。

Abstract

In this note, we are concerned with the tylings of a particular type. Let consider a right triangular lattice and a symmetric hexagon on that with 3pairs of facing adges of lengths a,b and c. I read the paper［1］and am interested in MacMahon's result therein.
Which enumerates the rhombus tylings of the hexagon. We give MacMahon's theorem in a simple case of C=1. In formula the number of tylings is expressed in terms of the binomial coefficients.

キーワード

敷き詰め　　ひし形　　六角形　　組み合わせ

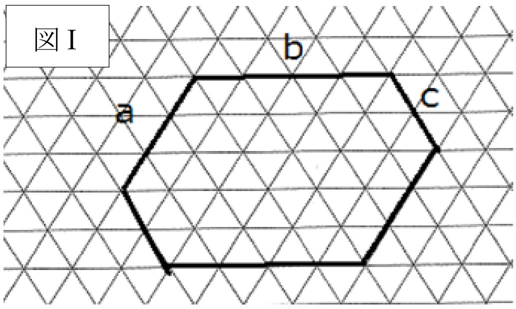
Keywords

tyling　rhombus　hexagon　combination

序論

一辺１の正三角形格子上に点対称な六角形をとり，その中を三角形二つ分のひし形で敷き詰めるとき，その総数について実際に数え上げを行い，また，数列や組み合わせを考えることで総数を求める研究をした。

図Ⅰ



本論

定義

一辺１の正三角形格子に点対称な六角形をとり，図Ⅰのようにそれぞれの辺の長さをa，b，cと定める。この六角形を$(a，b，c)$と表記する。その六角形を正三角形２つ分のひし形で敷き詰める場合の数を考える。回転して同じ敷き詰めになるものについては別のものとしてみなす。$N(a，b，c)$を上記の定義のもと，辺の長さがa，b，cである六角形を敷き詰める方法の総数とする。

上記の定義のもと，まずは実際に図を使って数え上げた。その際，辺の長さが長くなると数え上げにくいため，図Ⅱのように，塗りつぶしたひし形を１つずつ横にずらしながら整理して数え上げた。その結果以下のようになった。

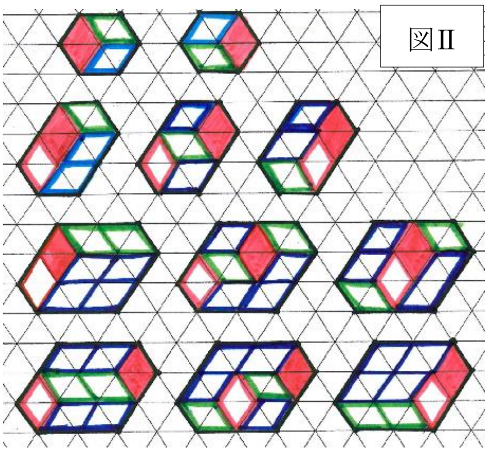
実際の数え上げ

- Ｎ（１，１，１）＝２
- Ｎ（２，１，１）＝３
- Ｎ（２，２，１）＝６
- Ｎ（２，３，１）＝１０
- Ｎ（２，４，１）＝１５
- Ｎ（２，２，２）＝２０
- Ｎ（３，１，１）＝４
- Ｎ（３，２，１）＝１０
- Ｎ（３，２，２）＝５０
- Ｎ（３，３，１）＝２０
- Ｎ（３，４，１）＝３５

（1，1，1）

（2，1，1）

（2，2，1）



図Ⅱ

さらに規則性を見つけるために，c の値を固定して考えていった。初めに，$c=0$ すなわち平行四辺形の場合について調べた。なお，これからは（1，1，0）を右上のひし形，（1，0，1）を縦のひし形，（0，1，1）を左上のひし形と表記する。

平行四辺形の場合

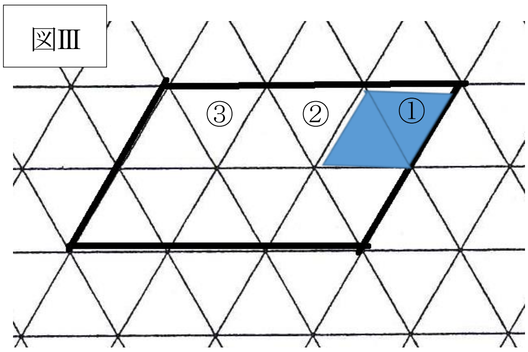
例えばN（2，3，0）について考えると，平行四辺形の敷き詰め方はただ１通りとなる。

なぜなら，この場合，図Ⅲの ① の三角形の部分をひし形で敷き詰めるには，右上のひし形をおくしかない。次に残った部分の図Ⅲの②の三角形の部分をひし形で敷き詰めるには，右上のひし形をおくしかない。さらに残った部分の図Ⅲの③の三角形の部分をひし形で敷き詰めるには，右上のひし形をおくしかない。同様に残った下の段も考えると，右上のひし形でしか敷き詰められないからである。

以上のことから，

$(a,\ b,\ 0)$の場合，すなわち平行四辺形の敷き詰め方は１通りである。

図Ⅲ

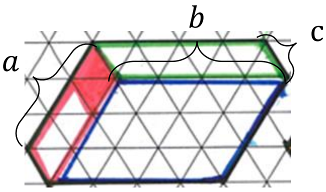


C=1 の場合

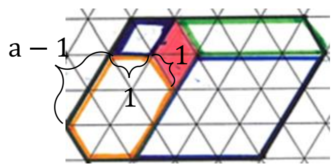
すなわちＮ（ａ，ｂ，１）について考えるとする。その際，塗りつぶした縦のひし形を図Ⅳのように１つずつ横にずらして調べた。

図Ⅳ

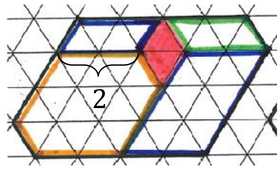
$N(a-1,\ 0,\ 1)$



$N(a-1,\ 1,\ 1)$

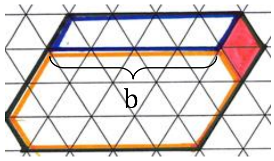


$N(a-1,\ 2,\ 1)$



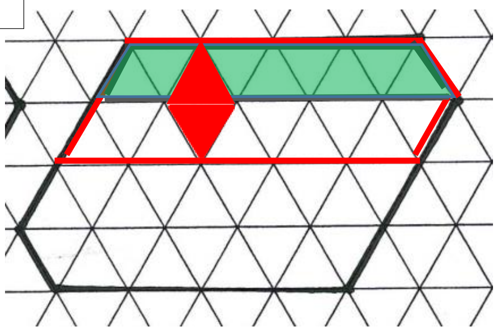
・
・
・

$N(a-1,\ b,\ 1)$



ここでまず図Ⅴの太く囲った部分を敷き詰める為に必ず縦のひし形が一つ必要になる理由を考えた。一番上の横列(図Ⅴの台形の部分)に右上か左上のひし形を使って敷き詰めていくと，最後，三角形１つ分があまる。その余った部分を敷き詰める為には，縦のひし形を１つおかなくてはならない。この時点で図Ⅴの一番上の列と２列目の境界線をまたぐものは，その縦のひし形１つとなる。また，先ほど置いた縦のひし形と同じ列に，２つ以上の縦のひし形をおくと敷き詰められない部分が現れるため，同じ列に２つ以上の縦のひし形をおくことはできない。また，一番上の列には縦のひし形をおいた部分をのぞき，平行四辺形がみられる。

図Ⅴ



このことを利用して，図Ⅳのように縦のひし形をおき，ひし形以外の部分を平行四辺形と六角形に分ける。平行四辺形の敷き詰め方はそれぞれ一通りであり，六角形は点対称となるので，その点対称な六角形の敷き詰め方の総数が全体の敷き詰め方の総数となる。この六角形の右上にのびる辺の長さは各場合すべて a−1, 左上にのびる辺の長さはすべて 1, 横の辺の長さは縦のひし形を１つずつずらすと，１ずつｂまでふえている。

以上のことをふまえると，

$$N(a,\ b,\ 1)=\sum_{k=0}^{b} N(a-1,k,1)\quad\cdot\cdot\cdot\boxed{1}$$

と表せる。

例えば，Ｎ（３，４，１）について考えると，計算方法は次の通りである。

Ｎ（３，４，１）
＝Ｎ（２，0，１）+Ｎ（２，１，１）
+Ｎ（２，２，１）+Ｎ（２，３，１）
+Ｎ（２，４，１）
＝１+３+６+１０+１５
＝３５

しかし，この計算の場合では，辺の長さの値は小さくなるがＮ（2,1,1）など実際に数え上げたデータを用いなければ答えを求められないという欠点がある。そこで式 $\boxed{1}$ の a の値についても条件を絞って，規則性がないかを考える。

ⅰ）$a=1$のとき

$$N(0,\ 0,\ 1)=1$$
$$N(0,\ 1,\ 1)=1$$
$$N(0,\ 2,\ 1)=1$$
$$N(0,\ 3,\ 1)=1$$
$$N(0,\ 4,\ 1)=1$$
$$\vdots$$
$$N(0,\ b,\ 1)=1$$

よって

$$N(1,\ b,\ 1)=\sum_{k=0}^{b} N(0,\ k,\ 1)=1+\sum_{k=1}^{b}1=b+1$$

ⅱ）$a=2$のとき

$$N(1,\ 0,\ 1)=1$$
$$N(1,\ 1,\ 1)=2$$
$$N(1,\ 2,\ 1)=3$$
$$N(1,\ 3,\ 1)=4$$
$$N(1,\ 4,\ 1)=5$$
$$\vdots$$
$$N(1,\ b,\ 1)=b+1$$

よって

$$N(2,\ b,\ 1)=\sum_{k=0}^{b}\mathrm{N}(1,\ k,\ 1)$$
$$=1+\sum_{k=1}^{b}(k+1)$$
$$=\frac{(b+1)(b+2)}{2}$$

iii）$a=3$のとき

$$N(2,\ 0,\ 1)=1$$
$$N(2,\ 1,\ 1)=3$$
$$N(2,\ 2,\ 1)=6$$
$$N(2,\ 3,\ 1)=10$$
$$N(2,\ 4,\ 1)=15$$
$$\vdots$$
$$N(2,\ b,\ 1)=\frac{(b+1)(b+2)}{2}$$

よって

$$N(3,\ b,\ 1)=\sum_{k=0}^{b}\mathrm{N}(2,\ k,\ 1)$$
$$=1+\sum_{k=1}^{b}\frac{(\mathrm{k}+1)(\mathrm{k}+2)}{2}$$
$$=\frac{(b+1)(b+2)(b+3)}{6}$$

iv）$a=4$のとき

$$N(3,\ 0,\ 1)=1$$
$$N(3,\ 1,\ 1)=4$$
$$N(3,\ 2,\ 1)=10$$
$$N(3,\ 3,\ 1)=20$$
$$N(3,\ 4,\ 1)=35$$
$$\vdots$$
$$N(3,\ b,\ 1)=\frac{(b+1)(b+2)(b+3)}{6}$$

よって

$$\mathrm{N}(4,\ \mathrm{b},\ 1)=\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{b}}\mathrm{N}(3,\ \mathrm{k},\ 1)$$
$$=1+\sum_{k=1}^{b}\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$$
$$=\frac{(\mathrm{b}+1)(\mathrm{b}+2)(\mathrm{b}+3)(\mathrm{b}+4)}{24}$$

以上の結果をまとめると

$$N(1,\ b,\ 1)=b+1$$

$$N(2,\ b,\ 1)=\frac{(b+1)(b+2)}{2}=\frac{(b+1)(b+2)}{2\cdot 1}$$

$$N(3,\ b,\ 1)=\frac{(b+1)(b+2)(b+3)}{6}$$
$$=\frac{(b+1)(b+2)(b+3)}{3\cdot 2\cdot 1}$$

$$N(4,\ b,\ 1)=\frac{(b+1)(b+2)(b+3)(b+4)}{24}$$
$$=\frac{(b+1)(b+2)(b+3)(b+4)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

このことから, $N(a,\ b,\ 1)$の値は次の式で表されることが予想される。

$$N(a,\ b,\ 1)=\frac{(b+1)(b+2)\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot(b+a)}{a!}={}_{b+a}C_a\quad\cdots\boxed{2}$$

これを帰納法で証明する。

ⅰ）$a=1$のとき

$$N(1,\ b,\ 1)=b+1$$
$${}_{1+\mathrm{b}}\mathrm{C}_1=\mathrm{b}+1$$

よって成立する。

ⅱ）a＝mのとき

$$N(m,\ b,\ 1)=\sum_{k=0}^{b}\mathrm{N}(m-1,\ k,\ 1)={}_{m+b}\mathrm{C}_{m}$$

が成立すると仮定すると，a＝m＋1のとき

$N(m+1,\ b,\ 1)$

$$=\sum_{k=0}^{b}\mathrm{N}(m,\ k,\ 1)=\sum_{k=0}^{b}{}_{m+k}\mathrm{C}_{m}=\sum_{k=0}^{b}{}_{m+k}\mathrm{C}_{k}$$

$$={}_{m}\mathrm{C}_{0}+{}_{m+1}\mathrm{C}_{1}+{}_{m+2}\mathrm{C}_{2}+{}_{m+3}\mathrm{C}_{3}\cdots+{}_{m+b}\mathrm{C}_{b}$$

$$=1+(m+1)+{}_{m+2}\mathrm{C}_{2}+{}_{m+3}\mathrm{C}_{3}\cdots+{}_{m+b}\mathrm{C}_{b}$$

$$={}_{m+2}\mathrm{C}_{1}+{}_{m+2}\mathrm{C}_{2}+{}_{m+3}\mathrm{C}_{3}\cdots+{}_{m+b}\mathrm{C}_{b}$$

$$={}_{m+3}\mathrm{C}_{2}+{}_{m+3}\mathrm{C}_{3}+\cdots+{}_{m+b}\mathrm{C}_{b}$$

$$={}_{m+b+1}\mathrm{C}_{b}$$

$$={}_{m+b+1}\mathrm{C}_{m+1}$$

よって，ⅰ）ⅱ）より数学的帰納法により，すべての自然数mについて成り立つ。

$\boxed{2}$で証明した式　$N(a,\ b,\ 1)={}_{b+a}C_{a}$　から，敷き詰め方の総数が組み合わせの式で表せることを図形的な観点から考えてみた。

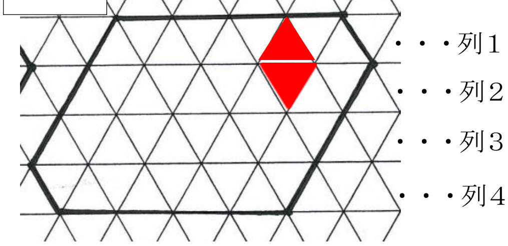
その際，必要となった考えがあった。

1，縦のひし形は図VIの列１列２の中に１つ，列２列３の中に１つというように同じ横の列の中に一つずつしかはいらない。

2，一番上の列から縦のひし形をおいていくと，一つ下の列には上の列においた縦の　ひし形よりも左側にしかはいらない。

ということである。

図VI



1について

図VIの六角形についてみると，列１については，図Vのところで示したように，縦のひし形が一つ必要となる。次に列２について考える。例えば，図VIのように塗りつぶした縦のひし形をおくと，列２の縦のひし形以外のところには平行四辺形と台形ができる。台形であるということは三角形が奇数個あるということである。ということは台形の部分を右上のひし形で敷き詰めていくと隙間なく埋めるためにはるには三角形一つ分をうめる縦のひし形が１つ必要となる。同じ操作を縦のひし形が一番下の列に達するまで行うと敷き詰めが完了する。このことから１についていえる。

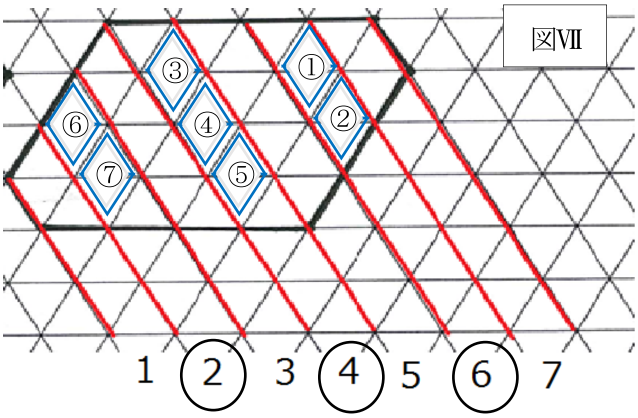
2について

図VIの塗りつぶした縦のひし形について注目してみると，列２では，その縦のひし形の左側に台形がみられる。よって列２では赤で塗りつぶしたひし形の左側に列２，列３をまたぐ縦のひし形が１つおける。列３についても同じことがいえた。このことから縦のひし形は，ある縦のひし形から見て上の列には，より右側に，下の列には，より左側に縦のひし形が現れるということが分かる。

以上のことをふまえて　$N(a,\ b,\ 1)={}_{b+a}C_{a}$　の図形的意味を考える。

例えば$N(3,\ 4,\ 1)={}_{4+3}C_{3}$　で調べてみると，

図VII



b+a とあるので，まず図Ⅶのように線分をひき，1 から順に番号をつけた。当然b+a の値の 7 までの番号となる。$_{3+4}C_3$の式から，3 つを選ぶということなので，試しに番号を 3 つ，6，4，2 と選んでみる。6 の列に縦のひし形をおくことを考えると，図Ⅶの①，②の 2 通りのおき方が考えられる。②に縦のひし形をおいた場合，4 の列には前に述べたことから，③，④には縦のひし形をおくことができないので，⑤に縦のひし形をおくことになる。そうすると 2 の列には⑥，⑦のどちらにも縦のひし形をおくことができない。よって縦のひし形のおきかたは 6 の列には①，4 の列には④，2 の列には⑦というただ 1 通りとなる。このことは，他の番号を選んでも同じことがいえる。

このことから，

全体の敷き詰め方の総数は縦のひし形のおきかたの総数と等しい

ことが分かった。

感想と今後の課題

今回の研究を通し，数学のおもしろさを実感することができた。特に単なるコンビネーションの式から図形的意味を見つけることができた瞬間の感激は忘れられない。

今後の課題としては，C＝2 の場合の敷き詰め方の総数についても，縦のひし形のおき方に注目して整理し，簡単な式を導き出せないか調べていきたい。

謝辞

私がお世話になった広島大学大学院理学研究科数学専攻教授 阿賀岡芳夫先生，香川大学教育学部教授　内藤浩忠先生，株式会社 KS プロジェクト代表・コリア国際学園理数科教員 鍵本聡先生，岡山大学理学部数学科教授 山田裕史先生，TA の岡山大学理学部数学科 村上大樹先生に，深く感謝の意を表します。

参考文献

[1] M.Ciucu and I.Fischer, Proof of two conjectures of Ciucu and Krattenthaler on the enumeration of lozenge tillings of hexagons with cut off corners.

[2] 高崎金久，線形代数と数え上げ，日本評論社