数学の取組

５月２８日（水）　２時間目　　　９：４５～１０：３５（後半２５分間）

６月　２日（月）　４時間目　　１１：４５～１２：３５

対象生徒　高校３年６組（４１名）

教科名・授業科目名　　　　「数学Ⅲβ」

取組タイトル　　　　　　　「放物線の焦点の性質」

【仮説】　放物線の焦点については，その名前と，$y^2=4px$　の焦点の座標が（p，0），$y=ax^2$の焦点の座標が（0，$\frac{1}{4a}$）であることは学習しているが，その性質「放物線（parabola）は軸に平行な光を反射して１点に集める」については紹介していない。$y^2=4px$　，$y=ax^2$　について２種類の証明を考えさせることにより，焦点の性質を論理的に考えさせたい。

第１時間目に全て解ける生徒は２，３人程度，解法も２通り以上出ることは見込めないと予想される。

解法を知り，さらには何通りかの解法を考えることにより，証明方法の比較や，色々な証明方法があることを知り，色々な角度から考え，探究する力を育てたい。

また，焦点の性質が実社会でも活かされていることを知ることにより，数学を身近に感じ，実社会に役立っていることを感じとらせたい。

【研究内容・方法】

・第１時間目に，証明を２問解く。

・第２時間目までに各自考える。

・第２時間目に，生徒が解いた証明を発表させ，紹介をする。何通りかの解法も紹介する。証明方法の比較や色々な証明方法があることを知る。

・焦点の性質を知る。

・放物線の性質が自然界にも存在したり，実社会に利用されたりしていることを知る。

問題

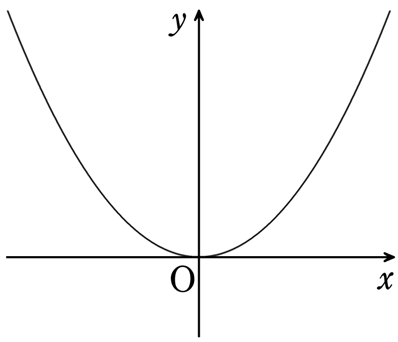
第１問

放物線 $y=x^2$の内側が鏡になっている。直線$y=1$ 上の点Ａ（a，１）（０＜a＜１）から光が y 軸に平行に真下に進むとき，放物線とぶつかる点をＢとし，Ｂで反射した光が再び放物線とぶつかる点をＣとする。

(1)　点Ｂにおける放物線の接線と y軸とのなす角を θとするとき，$\tan\theta$ の値をa を用いて表せ。

(2)　２点Ｂ，Ｃを通る直線の方程式を求めよ。

(3)　上の (2) で求めた直線はa に無関係な定点を通ることを示せ。



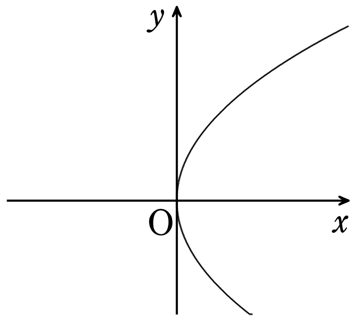
第２問

放物線 $y^2=4px$ $(p>0)$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線と x 軸との交点を T，放物線の焦点を F とすると，∠PTF＝∠TPF であることを証明せよ。ただし，$x_1>0$，$y_1>0$ とする。

《方針》

放物線$y^2=4px$上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$
における接線の方程式は

ＦＰ＝ＦＴを示す。



解答欄

点Ｐにおける接線をＳＴとし，点Ｐを通りx軸に平行に半直線ＰＱを引くと

∠ＳＰＱ＝＿＿＿＿＿＿

また，上より　∠ＰＴＦ＝∠ＴＰＦ

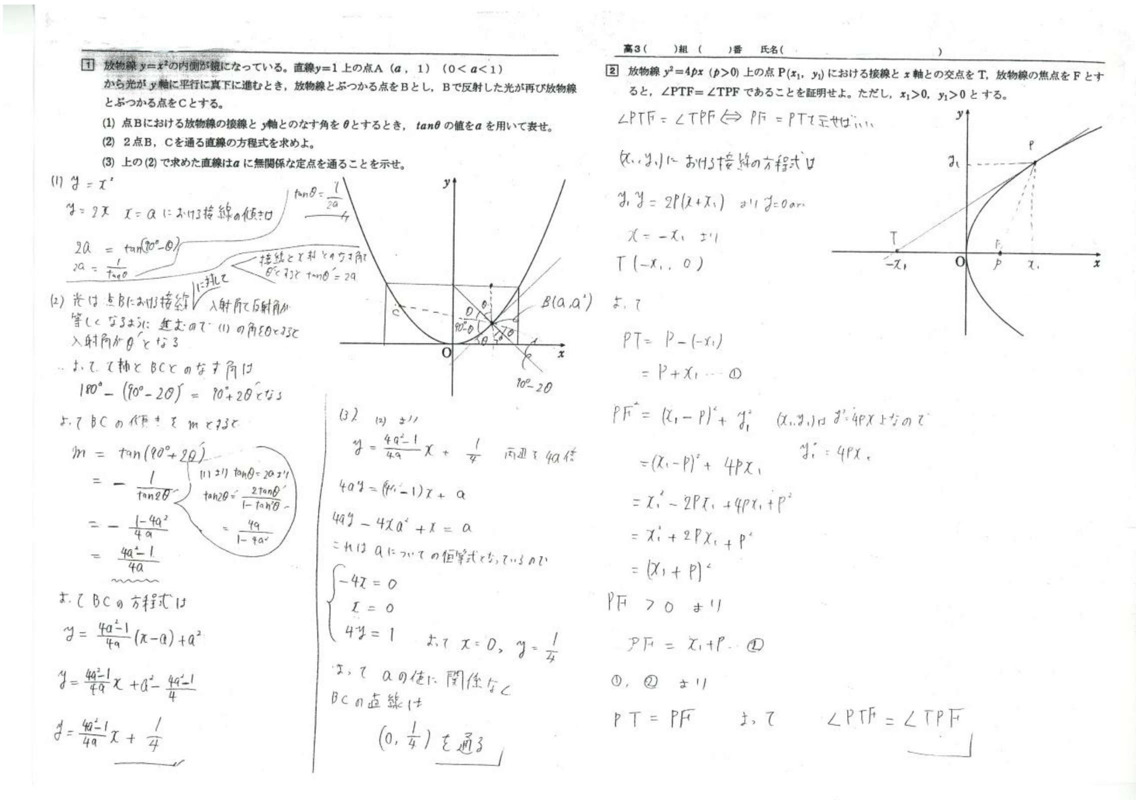
よって，＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

このことから，

内側が放物線状の鏡にx軸に平行に進む光線が当たって反射すると，

ことがわかる。

答案



1 放物線 $y=x^2$の内側が鏡になっている。直線$y=1$ 上の点A $(a,\ 1)$ $(0<a<1)$ から光が y軸に平行に真下に進むとき，放物線とぶつかる点をＢとし，Ｂで反射した光が再び放物線とぶつかる点をＣとする。

(1) 点Ｂにおける放物線の接線と y軸とのなす角を θとするとき，$\tan\theta$ の値をa を用いて表せ。

(2) ２点Ｂ，Ｃを通る直線の方程式を求めよ。

(3) 上の(2)で求めた直線はa に無関係な定点を通ることを示せ。

(1) $y=x^2$

$y'=2x$　$x=a$ における接線の傾きは

$2a=\tan(90°-\theta)$

$2a=\dfrac{1}{\tan\theta}$

$\tan\theta=\dfrac{1}{2a}$

接線とx軸とのなす角を θ'とすると $\tan\theta'=2a$

(2) 光は点Bにおける接線に対して入射角と反射角が等しくなるように進むので (1) の角をθとすると入射角が θ'となる

よって x軸と BCとのなす角は

$180°-(90°-2\theta')=90°+2\theta'$となる

よって BC の傾きを m とすると

$m=\tan(90°+2\theta')$

$=-\dfrac{1}{\tan 2\theta'}$

$=-\dfrac{1-4a^2}{4a}$

$=\dfrac{4a^2-1}{4a}$

(1) より $\tan\theta'=2a$ より

$\tan 2\theta'=\dfrac{2\tan\theta'}{1-\tan^2\theta'}$

$=\dfrac{4a}{1-4a^2}$

よって BC の方程式は

$y=\dfrac{4a^2-1}{4a}(x-a)+a^2$

$y=\dfrac{4a^2-1}{4a}x+a^2-\dfrac{4a^2-1}{4}$

$y=\dfrac{4a^2-1}{4a}x+\dfrac{1}{4}$

B(a, a^2)

$90°-\theta$

$90°-2\theta$

(3) (2) より

$y=\dfrac{4a^2-1}{4a}x+\dfrac{1}{4}$　両辺を 4a 倍

$4ay=(4a^2-1)x+a$

$4ay-4xa^2+x=a$

これは a についての恒等式となっているので

$\begin{cases}-4x=0\\ x=0\\ 4y=1\end{cases}$　よって $x=0$，$y=\dfrac{1}{4}$

よって a の値に関係なく BC の直線は

$\left(0,\ \dfrac{1}{4}\right)$ を通る

高３（　　）組（　　）番　氏名（　　　　　　　　）

2 放物線 $y^2=4px$ $(p>0)$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線と x 軸との交点を T，放物線の焦点を F とすると，∠PTF＝∠TPF であることを証明せよ。ただし，$x_1>0$，$y_1>0$ とする。

∠PTF＝∠TPF ⇔ PF＝PT を示せばいい

(x_1, y_1) における接線の方程式は

$y_1 y=2p(x+x_1)$ より $y=0$ のとき

$x=-x_1$ より

T $(-x_1,\ 0)$

よって

$\mathrm{PT}=p-(-x_1)$

$=p+x_1$ …①

$\mathrm{PF}^2=(x_1-p)^2+y_1^2$　(x_1, y_1) は $y^2=4px$ 上なので $y_1^2=4px_1$

$=(x_1-p)^2+4px_1$

$=x_1^2-2px_1+4px_1+p^2$

$=x_1^2+2px_1+p^2$

$=(x_1+p)^2$

PF ＞ 0 より

$\mathrm{PF}=x_1+p$ …②

①，② より

PT＝PF　よって　∠PTF＝∠TPF

高３数学　２次曲線

[1] 放物線 $y=x^2$ の内側が鏡になっている。直線 $y=1$ 上の点A（a，1）（$0<a<1$）から光が y 軸に平行に真下に進むとき，放物線とぶつかる点をBとし，Bで反射した光が再び放物線とぶつかる点をCとする。

(1) 点Bにおける放物線の接線と y 軸とのなす角を θ とするとき，$\tan\theta$ の値を a を用いて表せ。

(2) ２点B，Cを通る直線の方程式を求めよ。

(3) 上の (2) で求めた直線は a に無関係な定点を通ることを示せ。

1) 点Bにおける接線の方程式

B(a, a^2)

$y' = 2x$

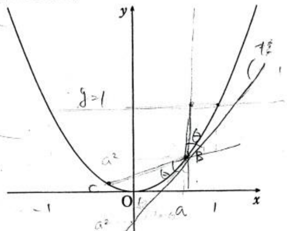
$y'(a) = 2a$

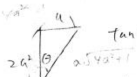
$y - a^2 = 2a(x-a)$

$y = 2ax - a^2$

$\tan(90-\theta) = 2a$

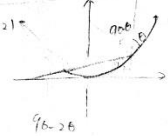
$\tan\theta = \frac{1}{2a}$





$\tan\theta = \frac{a}{2a^2} = \frac{1}{2a}$

2)



$\tan(90-2\theta) = \frac{1}{\tan 2\theta} = \frac{1}{\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}} = \frac{1-\frac{1}{4a^2}}{\frac{1}{a}} = \frac{\frac{4a^2-1}{4a^2}}{\frac{1}{a}} = \frac{4a^2-1}{4a}$

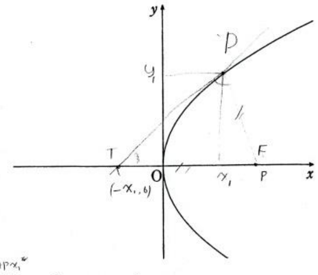
$y - a^2 = \frac{4a^2-1}{4a}(x-a)$

3) 2) で求めた式をせいりすると

$y = \frac{4a^2-1}{4a}x + \frac{1}{4}$

よって a の値に関係なく，点 $(0, \frac{1}{4})$ を通る。

[2] 放物線 $y^2=4px$ ($p>0$) 上の点 P(x_1, y_1) における接線と x 軸との交点を T，放物線の焦点を F とすると，∠PTF＝∠TPF であることを証明せよ。ただし，$x_1>0$，$y_1>0$ とする。



接線は

$yy_1 = 2p(x+x_1)$

$y=0$ のとき

$2px = -2px_1$

$x = -x_1$

$FT = p + x_1$

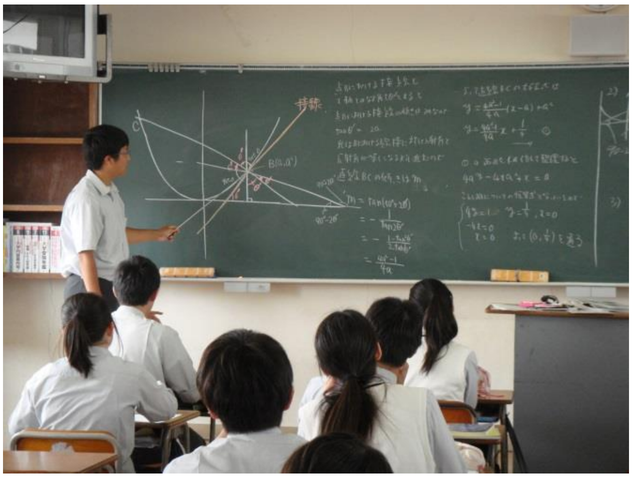
$(PF)^2 = y_1^2 + (p-x_1)^2 = y_1^2 + x_1^2 - 2px_1 + p^2$ （$y_1^2 = 4px_1$）

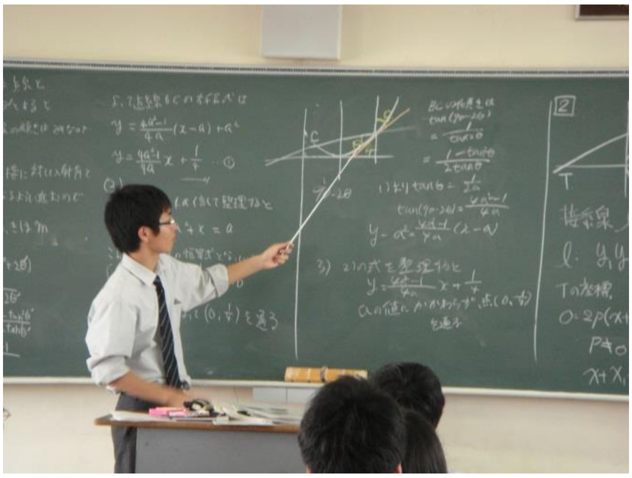
$= 2px_1 + p^2 + x_1^2 = (p+x_1)^2$

$PF > 0$ より $PF = p + x_1$

よって $PF = TF$ より ∠PTF＝∠TPF の二等辺三角形となる

《証明の発表》





【評価】

評価方法　　答案・発表・アンケート

答案

１時間目の結果

1　(3)まで解けた生徒が１名いた。

2　解けた生徒は２名。

２時間目の前

1　自宅学習で解けた生徒は３名。
(1)まで解けた生徒は１０名　(2)まで解けた生徒は１名。

2　自宅学習で解けた生徒は１０名。

アンケート結果（２時間目終了後アンケート実施）（　）は昨年度

１．自力で解けましたか？

第１問　⇒　解けた**３**（7）　方針は分かったが計算間違いをした**５**（7）　できなかった**３０**（15）

第２問　⇒　解けた**１０**（17）　方針は分かったが計算間違いをした**１**（4）　できなかった**２６**（10）

２．解説が分かりましたか？

第１問

分かった**２０**（17）　一部分からなかった**１０**（9）

殆どわからなかった**６**（2）　全く分からなかった**２**（1）

第２問

分かった**３０**（18）　一部分からなかった**２**（10）

殆どわからなかった**３**（2）　全く分からなかった**２**（0）

３．放物線の焦点や反射などの性質について分かりましたか？

性質だけは知っていたが今回論理的に分かった**７**（14）

すでに論理的に知っていた**４**（0）

性質だけは分かった**２４**（15）

何をやっているのか全く分からない**２**（0）

４．２次曲線が社会の中で利用されていることや自然現象の中に見られることを知りましたか？

知った**３７**（30）　知らない**１**（1）

５．２次曲線について以前より興味または関心を持ちましたか？

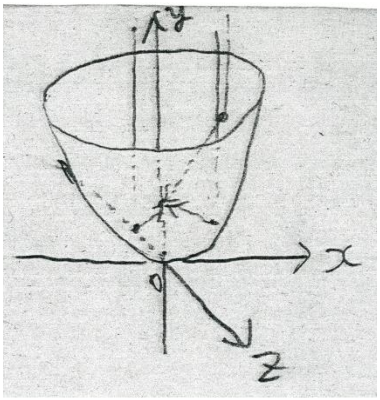
持った**２３**（18）　持たない**１５**（11）

６．この内容を５段階でいうと？

よくない	1	2	3	4	5	よかった
価値がない	**0**	**1**	**13**	**16**	**8**	価値がある
おもしろくない	(0)	(4)	(9)	(10)	(7)	おもしろい

７．２次曲線の性質などについての感想を書いて下さい。

- ○　実際に放物線にあたって反射したものが焦点を通るのを式で証明できて，楽しかった。
性質が面白かった。　２
- ○　身近な場所に使われているというのを知り，以前よりも少し関心を持つようになった。２
- ○　自然界や身近に２次曲線など，数学が使われているのを始めて知って面白かった。
社会の中で利用されているので，興味を持った。驚いた。面白かった。　７
- ○　ｔａｎθの変形をもう一度覚え直すことができたので，そういうことを含めて大変よかった。
他の人の解き方も知れてよかった。
- ○　少し難しかったです。性質を上手く使っていきたいです。
- ○　世の中は数学によって支配されていると思った。
- ○　物理とつながって面白かった。　これをもっと物理に応用していけるように深めていきたい。２
- ○　解説を聞くと，とても簡単だった。
- ○　パラボラアンテナは凄いと思った。
- ○　性質をもう少ししっかり復習しようと思った。ｔａｎθの公式を忘れていた。
- ○　社会の中で使われていることを知ったので，探してみようと思いました。
- ○　よかった。
- ○　難しい。２
- ○　性質自体は興味深いが，証明となると難しい。
- ○　難しい内容だったけど分かるととても面白かった。
- ○　自力で解けなかったので悔しい。解説を聞いて，なるほど！と思えた。
- ○



実践しての授業者の感想・評価・今後の課題

第１時間目に，$\boxed{1}$が時間内で解けた生徒には感心した。しかし，自宅学習でも３名の生徒しか解けなかったのは残念。$\boxed{2}$については，時間内に解けた生徒は２名。現在学習している公式等を使った解き方であり，計算量も多くないので$\boxed{1}$より解きやすかったのではないか。

発表する生徒はしっかりと発表できた。また，$\boxed{1}$については，２人の生徒が発表した。設定の方法の違いで，考え方の根本は同じでも色々な表現の仕方があることが生徒の発表の中から示せた。全員の生徒が興味を持って参加できた。

アンケート結果から，１回の説明では，全員の生徒を理解・定着させることは難しく，理解できないままに終わっている生徒に対する補強が必要であると感じた。また，理解できても自力で解けるまでに，何度も復習しないと定着できないようであると感じた。

アンケートから，以前より数学を身近に感じ興味を持った生徒が６０％いて，数学が自然の中にも存在したり，実社会にも生かされていることを知り，以前より身近に感じ，興味・関心を持った生徒が増えた。さらにやってみたいという生徒もいた。また更に発展させ，３次元で図を書いた生徒には生徒の無限の可能性を感じた。

今後の指導においても，生徒の興味・関心の持てる教材を取り入れ，数学に興味・関心を持たせたい。